NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Recuerde que debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificad@ con nota mínima.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables y formularios
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración**= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) a) Sea $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ y $q(x) = x^2 - 1$ dos polinomios. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, JUSTIFICANDO en todos los casos su respuesta.

   I) **[4 ptos.]** $(x+1)$ es factor de $p(x)$

   II) **[5 ptos.]** El resto de dividir $p(x)$ con $q(x)$ es $r(x) = -2 - 2x$

   III) **[5 ptos.]** La factoricación de $p(x)$ en $\mathbb{R}$ es $p(x) = (x-2)(x^2+1)(x+1)$

   b) **[6 ptos.]** Descomponer en fracciones parciales

$$t(x) = \frac{x+1}{p(x)}$$

Solución:

a) I) Verdadera, ya que $p(-1) = 0$

   II) Verdadera, ya que $p(x) = (x^2-1)(x^2-x) - 2 - 2x$, donde $r(x) = -2 - 2x$

   III) Verdadera, ya que por la parte I) se sabe que -1 es una raiz de $p(x)$. Haciendo división sintética tenemos que:

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c|c||c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ \hline & -1 & 2 & -1 & 2 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & \end{array}\right\} \Longrightarrow p(x) = (x+1)\underbrace{(x^3 - 2x^2 + x - 2)}_{s(x)}$$

Como 2 es raíz de $s(x)$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c||c} 1 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}\right\} \Longrightarrow p(x) = (x+1)(x-2)(x^2+1)$$

b) $t(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x^2+1)} = \dfrac{A}{(x-2)} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A(x^2+1) + (x-2)(Bx+C) = 1$ Por lo que $A = \dfrac{1}{5}$, $B = -\dfrac{1}{5}$, $C = -\dfrac{2}{5}$. Por lo tanto:

$$t(x) = \frac{1}{5(x-2)} + \frac{(-x-2)}{5(x^2+1)}$$

2) **[20 ptos.]** Una fábrica para producir poleras y pantalones emplea tres máquinas: Una para cortar, otra para coser y la otra para teñir. Fabricar una polera representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, tres horas y la de teñir, una hora. Fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, una hora y la de teñir, ninguna hora. La máquina de teñir se puede usar durante tres horas, la de coser, once y la de cortar, siete. Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de 8000 pesos por cada polera y 5000 pesos por cada pantalón. ¿Cuantas poleras y pantalones se deben hacer para obtener el beneficio máximo? ¿Cúal es el beneficio máximo?

Solución: Sea x =número de poleras, y =número de pantalones
Maximizar la función $F(x, y) = 8000x + 5000y$

$$Restricciones \qquad \left.\begin{array}{r} x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 11 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0,\, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

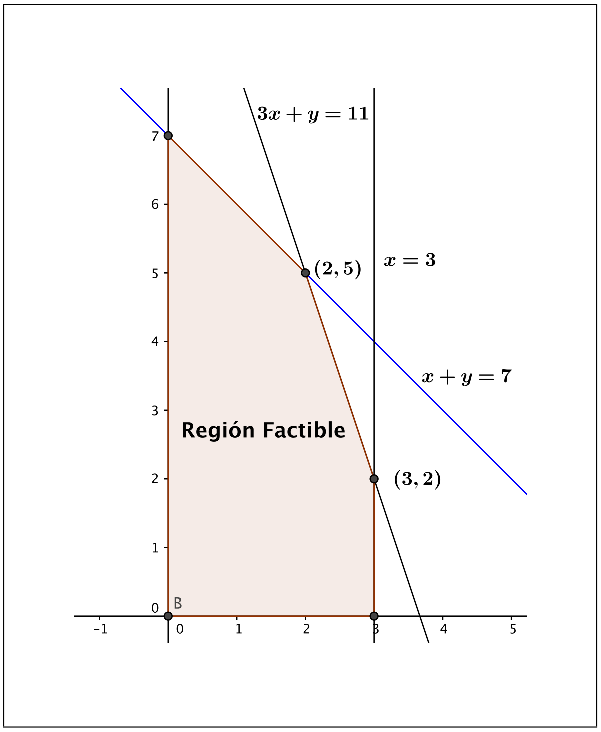

Tabla de valores

Vértices	$F = 8000x + 5000y$	
$(0, 0)$	0	
$(3, 0)$	24000	
$(3, 2)$	34000	
$(2, 5)$	41000	$\leftarrow$
$(0, 7)$	35000	

Por lo que el máximo beneficio se obtiene con 2 poleras y 5 pantalones y el beneficio máximo es de 41000 pesos

3) a) **[10 ptos.]** Dada la siguiente ecuación, identificar que tipo de cónica es, entregado su centro y sus focos.

$$9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$$

Solución:

$$\begin{aligned}
9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y &= 16 \\
9(x^2 - 8x) - 16(y^2 + 2y) &= 16 \\
9[(x-4)^2 - 16] - 16[(y+1)^2 - 1] &= 16 \\
9(x-4)^2 - 16(y+1)^2 &= 9 \cdot 16 \\
\frac{(x-4)^2}{4^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} &= 1
\end{aligned}$$

Se trata de una Hipérbola con centro $(4,-1)$ y focos $(9,-1)$, $(-1,-1)$

b) **[10 ptos.]** Considere los puntos $A(0,0)$ y $B(6,0)$. Determine el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que el producto de las pendientes de los trazos PA y PB es constante igual a 4. Identifique la cónica y determine las coordenadas del centro.

Solución: Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x} \cdot \frac{y}{x-6} &= 4 \\
\frac{y^2}{x(x-6)} &= 4 \\
y^2 &= 4x(x-6) \\
y^2 &= 4x^2 - 24x \\
y^2 &= 4(x^2 - 6x) \\
y^2 &= 4[(x-3)^3 - 9] \\
y^2 &= 4(x-3)^3 - 36 \\
4(x-3)^2 - y^2 &= 36 \\
\frac{(x-3)^2}{3^2} - \frac{y^2}{6^2} &= 1
\end{aligned}$$

Por lo que es una Hipérbola con centro $(3,0)$

UTALCA IMAFI